I CONGRESO IBEROAMERICANO DE DOCENTES

CONGRESO VIRTUAL DEL 26 NOVIEMBRE AL 08 DICIEMBRE DE 2018

ALGECIRAS (CÁDIZ) DEL 06 AL 08 DICIEMBRE DE 2018

Actas del Congreso Iberoamericano de Docentes

Análisis del sentido de la división en la Escuela Secundaria

Daniel Luis Mosqueda

ISBN: 978-84-948417-0-5

Edita **Asociación Formación IB**.

Coordinación editorial: **Joaquín Asenjo Pérez, Óscar Macías Álvarez, Patricia Ávalo Ortega y Yoel Yucra Beisaga**

Año de edición: **2018**

Presidente del Comité Científico: **César Bernal.**

El I Congreso Iberoamericano de Docentes se ha celebrado organizado conjuntamente por la Universidad de Cádiz y la Asociación Formación IB con el apoyo del Ayuntamiento de Algeciras y la Asociación Diverciencia entre otras instituciones.

http://congreso.formacionib.org

red iberoamericana de docentes

UCA Universidad de Cádiz

formaciónib

Análisis del sentido de la división en la Escuela Secundaria

Autor: Mosqueda Daniel Luis.

Entidad: Facultad de Ciencias Económicas – Universidad Nacional del Nordeste (UNNE)

Correo electrónico: dani.luis13@gmail.com

Resumen

Este trabajo es el fruto del desarrollo del trabajo final de un curso de posgrado *La construcción del sentido en Matemática. Perspectivas teóricas e implicaciones prácticas* (2017) dictado por la Dra. Sara Scaglia, en el marco de Formación Docente Continua de la Universidad Nacional del Nordeste (UNNE - Argentina). Se analizó desde el punto de vista matemático - didáctico (posibles procedimientos, variables didácticas, entre otros) un problema propuesto por Sadovsky citado en el artículo denominado *Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática*, referido a la división entre números naturales y un registro de clases del Nivel Medio en el cual se implementó dicha actividad.

Se pudo concluir la importancia del intercambio de ideas entre los alumnos en la clase, la producción de conocimiento como lo menciona Brousseau frente a la actividad matemática y el rol fundamental del docente ante dicha actividad.

Metodología

Se llevó a cabo un análisis de un problema y del registro de clases en función de algunos conceptos de la Teoría de Situaciones Didácticas.

Problema: Proponé una cuenta de dividir en la que el divisor sea 32 y el resto 27. ¿Cuántas soluciones hay? Si pensás que hay menos de tres, escribilas todas y explicá por qué no hay más. Sí pensás que hay más de tres soluciones, proponé al menos cuatro y explicá cómo pueden obtenerse otras soluciones.[1]

Análisis de la actividad[2]

La finalidad de la actividad propuesta es la de que los alumnos del Nivel Medio encuentren relaciones entre el divisor, cociente, resto y dividendo; estudien la relación divisor como objeto en sí mismo y no sólo como un algoritmo (cuenta). En otras palabras, esta propuesta didáctica está destinada a que ellos conciban las operaciones aritméticas como relaciones entre sus elementos (Sadovsky, 2005)

Antes de iniciar el análisis, es fundamental tener en cuenta el concepto de variable didáctica. Según Brousseau (2007), variable didáctica es aquella variable de la situación,

[1] Extraído de Sadovsky P. (s.f) en *Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática*

[2] En el siguiente análisis se consideró como conjunto numérico a N_0 (naturales con el 0), el cual fue considerado como conjunto de referencia en la clase.

fijada por el docente, tal que por la elección de algunos de sus valores puede provocar en los alumnos cambios en su conocimiento, con el objeto de hacerlos evolucionar.

Las *variables didácticas* que se pueden identificar en este problema son:

- El tamaño del valor del resto. Por ejemplo si el resto fuera 0, la búsqueda de las divisiones se reducen a buscar los múltiplos de 32. Se podrá determinar la validez de las respuestas, mediante la realización de cuentas de dividir o multiplicar y sumar.
- Los datos del problema, es decir los elementos de una división. Si se conocen:
  a) Dividendo y el divisor: La respuesta es única, es decir sólo se encuentran un valor para el cociente y un único valor para el resto.
  b) Divisor, cociente y resto (válido): se obtiene dividendo único.
  c) Dividendo, divisor y cociente, dará lugar a un resto único.
  d) Cociente y resto. Infinitas soluciones. El valor del divisor d será $d \geq r + 1$
  e) Cociente y divisor. Infinitas soluciones.
  f) Dividendo y resto. Un número finito de soluciones.
  g) Divisor y cociente. Infinitas soluciones para el dividendo y el resto. Tal que este último tome valores menores al divisor.
  h) Resto y divisor. Infinitas valores para el cociente y el dividendo.

Conocimientos de base:

- Operaciones con números naturales: suma, resta, multiplicación y división.
- Tablas de multiplicar.

Algunos de los posibles procedimientos que harían los alumnos son:

<u>Tanteo Tipo 1</u>: lo cual consiste en probar con distintos números hasta lograr el resto buscado.

<u>Tanteo Tipo 2</u>: probar con números e ir ajustando hasta obtener el resto 27. Así para 40 el resto de dividirlo por 32 es 8 y el cociente 1. Como debe sobrar 27= 8 + 19. Habrá que sumar al dividendo19. Es decir 40 + 19= 59. Y la solución es dividendo 59, divisor 32, cociente 1, resto 27. Al agregar 19 unidades al dividendo no alcanza para agruparlos de a 32. Cuando el resto es mayor que 27, es necesario realizar una resta.

Justificación matemática del procedimiento anterior.

Por el Algoritmo de la División Entera se tiene: al dividir un número entero D por 32, existen y son únicos los números enteros c y r tales que $D = 32 \cdot c + r$.

Supongamos en un primer caso $r < 27$. Luego $D + (27 - r) = (32 \cdot c + r) + (27 - r) =$
$= 32 \cdot c + 27 + r - r = 32 \cdot c + 27$. Luego el número entero $D + (27 - r)$ verifica las condiciones del problema.

Si $r > 27$, entonces $D - (r - 27) = (32 \cdot c + r) - (r - 27) = 32 \cdot c + r - r + 27 = 32 \cdot c + r$. Es decir hay que restar al dividendo, la diferencia que resulta de restar el resto obtenido y 27. Con lo dicho anteriormente, se observa que existen infinitas soluciones que cumplen con las condiciones del problema.

- Si los alumnos conocen el algoritmo de la división: Pueden realizar $D = 32 \cdot c + 27$
  Si c = 0 entonces, $D = 32 \cdot 0 + 27 = 27$

  Si c = 1, $D = 32 \cdot 1 + 27 = 59$

  Etc.

- Multiplicar cualquier número natural por 32 e ir sumando a los productos obtenidos 27. Lo cual muestra la existencia de infinitas soluciones. Esto podría validarse teniendo en cuenta que los 27 que “sobran” surge porque no se los puede agrupar en 32, esto si tenemos en cuenta la noción de reparto asociada al concepto de división.

- Sumar 32 + 27 = 59 y luego ir sumando sucesivamente 32.

  59 + 32 = 91

  91 + 32 = 123

  123 + 32 = 155

Siempre irá quedando 27, que no se los puede agrupar en grupos de 32.

Justificación matemática:

Si x cumple con la condición pedida, $x = 32. c + 27$, luego $x + 32 = 32 . c + 27 + 32 = =32 . (c + 1) + 27$.

Al resolver esta actividad, los alumnos podrán llegar a la conclusión de que al sumar 27 a todo múltiplo de 32, lograrán obtener todos los dividendos que son solución del problema.

Las diferencias entre esta actividad y las que se plantean frecuentemente en la escuela a los alumnos, es que siempre los datos son el dividendo y el divisor, por lo que tienen que hallar el cociente y el resto. En esta actividad propuesta por Sadovsky (s.f), se ponen en juego otras relaciones que no se evidencian al realizar una cuenta de dividir. Por ejemplo, a los valores que cumplen con la condición, al restar 27 se obtiene siempre múltiplos de 32. También es un problema que admite infinitas soluciones, lo cual no se los plantea. Siempre son problemas con una única solución.

Al resolver la situación problemática, los alumnos tendrán dificultad en que ellos deben tomar decisiones y de asignar valores al cociente o al dividendo. Actividad que comúnmente no se las propone en la clase de matemática. De esta manera se construye en la práctica matemática, realizando acciones sobre los elementos de esta situación y estipulando las que pueden ser realizables *al establecer el marco discursivo en que se van a usar los sistemas matemáticos* (Freudenthal: 2)

Parafraseando a Sadosky (2005), no siempre la fuente de sentido de los conceptos debe provenir de los contextos extra matemáticos porque a veces ocultan aquello que se espera que produzcan los alumnos. Además si un concepto funciona en un determinado contexto no garantiza su uso en otro. Por ejemplo, uno de los usos extra matemáticos más utilizados de la división es el de reparto, pero éste generalmente plantea una solución única y no garantiza poder realizar las relaciones entre la multiplicación y división que se pretende con una situación descontextualizada como la que se planteó.

Análisis del Registro

Se puede afirmar que no hubo discusión entre los alumnos. Se desaprovechó las posibles discusiones que pueden producirse en una clase y que contribuye a modificar posiciones adoptadas, tal vez, en forma errónea por los alumnos. El debate en la clase constituye un valioso aprendizaje y esa interacción permitiría construir una posición de búsqueda de justificaciones necesarias para producir conocimiento. Se ha advertido en toda la clase una interacción entre el docente y el alumno.

Durante la observación se ha evidenciado que el docente no tiene control sobre lo que pasa en la clase. No puede llevarla hacia la construcción de un sentido. Algunos interrogantes como: ¿Qué opinan sobre este razonamiento? ¿A qué se refiere el compañero? Podrían haber colaborado en la construcción. En el siguiente fragmento del registro puede advertirse lo expuesto:

Daniela: noventa y seis, pongo el tres acá. Tres por dos, ahí ya es seis, acá ya me va a dar cero, ahí ya cambia.

- *Docente: claro. O sea, no es*
- *Daniela: y si es un número más grande me va a faltar*
- *Leandro: ¿Puede ser por tres dígitos? (estaba pensando algo mientras Daniela hablaba)*
- *Docente: si*
- *Daniela: si es 4… no, pero se va a ir achicando cada vez más.*
- *Docente: ¿por qué?*
- *Leandro: 123 ¿puede ser otro?*

Al estudiante Leandro le resulta difícil tomar decisiones por sí solo. Espera que el docente determine lo que es correcto o no, en lugar de valerse del ***medio*** que proporciona suficiente información sobre lo que el cuestiona.

- *Leandro: ¿Puede ser por tres dígitos? (estaba pensando algo mientras Daniela hablaba)*
- *Docente: si*

El docente proporciona ayudas indirectas, proporcionando apoyo al alumno mediante ejemplos. Resulta adecuada esta intervención ya que la alumna no ha podido involucrarse en la situación.

- *Docente: pueden mirar una que conozcan, fíjense esta que es la más facilita (17 divido 3). Cinco por tres te da quince, ¿no es cierto? O sea que, si vos por ejemplo desconocieras acá, (el dividendo) y pusieras 15 no te serviría, porque te quedaría…*
- *Daniela : cero*
- *Docente: cero, pero es el diecisiete, ¿sí? ¿Y por qué sirve acá el 17?*
- *Daniela: porque tiene resto.*
- *Docente: tiene resto, en este caso dos. Entonces acá para que tenga resto, ¿qué es lo que tiene que pasar?*
- *Daniela: tiene que ser un número que me de menor a este número.*
- *Docente: ¿qué te de menor al dividendo?*

En el fragmento anterior en lugar de preguntar "¿qué te de menor al dividendo?", podría haber planteado ¿cuál debería ser menor? Y de esa manera no limitar el razonamiento del alumno.

Queda claro la intencionalidad del docente y el deseo de que haya distintas producciones en la clase. Pero no debería forzar la situación para que logren realizar diferentes producciones sino más bien propiciar el debate sobre las propuestas sugeridas por los alumnos como posibles soluciones.

- *Daniela: ahí tengo uno, tengo que buscar más.*
- *Docente: si vos crees que hay más… porque ahí es lo que vos creas. Si pensás que hay menos de tres o si hay más. Ahora, también ahí...ésta es una manera de encontrarlo pero también pueden haber otras, por ahí Lucrecia si vos pensás en otra manera…*

En el registro realizado se pueden evidenciar solo dos procedimientos, uno propuesta por Leandro y la otra propuesta por Daniela. En ningún momento de la clase se evidencia que los procedimientos sean validados ni por el docente ni por el alumno. Al finalizar la actividad, no se llegan a ningún tipo de conclusión sobre las soluciones. En términos de Brousseau (op. cit): producir conocimientos supone tanto establecer nuevas relaciones, como transformar y reorganizar otras. En todos los casos, producir conocimientos implica validarlos, según las normas y los procedimientos aceptados por la comunidad matemática en la que dicha producción tienen lugar. Queda por responderse ¿A qué conclusiones se llegó? ¿Los procedimientos que proponen son similares? ¿Por qué?

- *Daniela: me da 27. Y yo esto saqué así. Hice siete por 32 me dio 224, más 27, 251*
- *Docente: 224 más 27*
- *Daniela: ahí me dio 251, y ahí le probé.*
- *Docente: bueno, eso que me dijiste recién anótalo*
- *Daniela: ¿cómo profe?*

De acuerdo con el análisis a priori, puede observarse que el procedimiento utilizado por Daniela es uno de los procedimientos posibles. Mientras que el de Leandro, si bien es verdadero se dificulta para valores mayores que 9. Lamentablemente no se produjo debate entre los alumnos, situación que favorece a la producción de conocimientos. Solo trabajo individual del alumno con el docente. No se analizan los procedimientos, si son válidos o no. En qué casos, usar una determinada estrategia es primordial desde el punto de vista de la economía de los procedimientos. Los alumnos propusieron ideas que podrían ser debatidas para producir nuevas relaciones, las que no fueron advertidas por el docente. El papel del docente es esencial al plantear problemas que emergen de la producción de los alumnos; es necesario que exija más precisión en las formulaciones planteadas por los estudiantes, discuta, repregunte e interpele las cuestiones que surgen en el desarrollo de la clase. De esta manera un docente considera a sus alumnos como sujetos productores de conocimientos, capaces de construir el sentido de un concepto matemático. Por supuesto se habla de una construcción que resulta de un modo de hacer que se va formando en una clase, cuando lo que se busca es enseñar la actividad matemática y no únicamente la matemática (Sadovsky, 2005).

Conclusiones

Se advirtió interacción docente – alumno y no alumno – alumno. Si bien se observó la intencionalidad del docente. Éste no pudo llevar la clase hacia la construcción de un sentido de la división.

Se observó la intencionalidad del docente y su deseo de que surjan distintas producciones y aquí resulta indispensable propiciar el debate sobre las propuestas de los alumnos.

Las discusiones contribuyen a modificar posiciones adoptadas por los estudiantes a fin de lograr un aprendizaje valioso y fructífero. No se evidencia que los procedimientos sean validados ni por el docente ni por el alumno. En contraposición de lo que propone Brosseau (op. cit) producir conocimientos supone establecer nuevas relaciones, transformarlas y reorganizar otras y además implica validar los conocimientos de acuerdo a la comunidad matemática en la que dicha producción tiene lugar.

Bibliografía

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas* (1ª ed). Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy- Miradas, sentidos y desafíos”*. (1ª ed). Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Sadovsky, P. (s.f).*Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática”.* Disponible en http://www.matematicassinaloa.com/Informacion/Documentos/26_La%20Teoria%20de%20Situaciones%20Didacticas.pdf

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* [Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas]. Dordrecht: Reidel.

“Análisis del sentido de la división en la Escuela Secundaria”

Autor: Mosqueda Daniel Luis. Correo electrónico: dani.luis13@gmail.com

Facultad de Ciencias Económicas – Universidad Nacional del Nordeste (UNNE) - Argentina.

1- Introducción

- Con frecuencia en la Escuela Secundaria se proponen actividades sobre división entera (cuenta)
- Las múltiples relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto no se evidencian al realizar la cuenta de dividir.
- Siempre los problemas con división admiten solución única.
- Según Sadovsky (s.f.), no siempre la fuente de sentido de los conceptos debe provenir de los contextos extramatemáticos, porque a veces ocultan aquello que se espera que produzcan los alumnos. Un concepto puede funcionar en un determinado contexto pero su uso no puede garantizarse en otro.
- **Objetivo General**: Analizar matemática y didácticamente un problema referido a la división en N, propuesto por Patricia Sadovsky.

2- Metodología

Se utilizó la Teoría de Situaciones Didácticas para el análisis del problema y del registro de clases de un curso del Nivel Medio.

Problema: Proponé una cuenta de dividir en la que el divisor sea 32 y el resto 27. ¿Cuántas soluciones hay? Si pensás que hay menos de tres, escribilas todas y explicá por qué no hay más. Sí pensás que hay más de tres soluciones, proponé al menos cuatro y explicá cómo pueden obtenerse otras soluciones.

El problema admite infinitas soluciones, lo cual puede ser una noción nueva para los alumnos. Estudiar la relación divisor como objeto en sí mismo y no sólo como un algoritmo, constituye una propuesta didáctica destinada a que los alumnos *conciban las operaciones aritméticas como relaciones entre sus elementos.*

2.1.-Variables didácticas identificadas

o El tamaño del valor del resto.

o Los datos del problema, es decir los elementos de una división. Si se conocen:

a) Dividendo y el divisor: respuesta única.

b) Cociente y divisor: Infinitas soluciones.

c) Dividendo y resto: un número finito de soluciones.

d) Se determinó ocho casos en total.

2.2. - Posibles Procedimientos de los alumnos

Tanteos (cuentas de dividir), multiplicar cualquier número natural por 32 e ir sumando a los productos obtenidos, 27. Sumar 32 + 27 = 59 y luego sucesivamente 32 (se obtienen números cuyo resto es 27 al dividirlos por 32)

2.3.-Análisis del Registro de clases

3- Conclusiones

- Se advirtió interacción docente – alumno.
- El docente del registro no pudo llevar la clase hacia la construcción de un sentido.
- Se observó la intencionalidad del docente y su deseo de que surjan distintas producciones. Resulta indispensable propiciar el debate sobre las propuestas de los alumnos.
- Las discusiones contribuyen a modificar posiciones adoptadas por los estudiantes a fin de lograr un aprendizaje valioso y fructífero.
- No se evidencia que los procedimientos sean validados ni por el docente ni por el alumno. En contraposición de lo que propone Brosseau: producir conocimientos supone establecer nuevas relaciones, transformarlas y reorganizar otras y además implica validar los conocimientos de acuerdo a la comunidad matemática en la que dicha producción tiene lugar.

4- Bibliografía

- Brousseau, G. y Fregona, D. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. 1ª ed. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Puig L. (2001). *Notas para una lectura de la fenomenología didáctica de Hans Freudenthal*. México: CINVESTAV. Disponible en https://www.uv.es/puigl/intronota.pdf
- SADOVSKY, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy- Miradas, sentidos y desafíos*. 1a ed. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- SADOVSKY, P. (s.f.) *Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática*. Disponible en http://www.matematicassinaloa.com/Informacion/Documentos/26_La%20Teoria%20de%20Situaciones%20Didacticas.pdf